

# Harapan Matematik

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*  
Oleh: Rinaldi Munir  
**Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB**

# Definisi Harapan Matematik

- Satu konsep yang penting di dalam teori peluang dan statistika adalah **ekspektasi matematik** atau **nilai ekspektasi**.
- Ekspektasi matematik = harapan matematik.
- Misalkan dua uang logam dilempar secara bersamaan sebanyak 16 kali. Misalkan  $X$  menyatakan banyaknya sisi angka ( $A$ ) yang muncul pada setiap pelemparan, maka  $X$  dapat bernilai 0, 1, atau 2. Misalkan pada eksperimen tersebut dicatat berapa kali muncul 0, 1, atau 2 sisi buah sisi angka pada setiap pelemparan, dan diperoleh hasil masing-masing 4 kali, 7 kali, dan 5 kali. Berapa rata-rata banyaknya sisi angka yang muncul pada setiap lemparan?

- Rata-rata (atau rata-rata) banyaknya sisi angka yang muncul pada setiap pelemparan kedua koin tersebut adalah:

$$\begin{aligned} &= \frac{(0)(4) + (1)(7) + (2)(5)}{16} \\ &= (0)(4/16) + (1)(7/16) + (2)(5/16) \\ &= 1.06 \end{aligned}$$

- Kita ingin menghitung berapa rata-rata banyaknya sisi angka dari pelemparan dua uang logam yang dapat diharapkan muncul dalam **jangka panjang**? Inilah yang dinamakan nilai ekspektasi atau nilai harapan.
- Notasi:  $E(X)$  = nilai harapan (harapan matematik)

- Untuk suatu peubah acak diskrit  $X$  yang memiliki nilai-nilai yang mungkin  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , nilai harapan dari  $X$  didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \dots + x_nP(X = x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \end{aligned}$$

- Mengingat  $P(X = x_i) = f(x_i)$ , maka

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \dots + x_nf(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \end{aligned}$$

- Sebagai kasus khusus bila peluang setiap nilai  $x_i$  adalah sama, yaitu  $1/n$ , maka

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1(1/n) + x_2(1/n) + \dots + x_n(1/n) \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \end{aligned}$$

yang disebut rata-rata, rata-rata, rerata, atau *mean* aritmetika, dan dilambangkan dengan  $\mu$ .

- Nilai harapan dari  $X$  seringkali disebut rata-rata dan dilambangkan dengan  $u_x$ , atau  $\mu$  jika peubah acaknya sudah jelas diketahui.

- **Definisi 1.** Misalkan  $X$  adalah peubah acak dengan distribusi peluang  $f(x)$ . Nilai harapan atau rata-rata  $X$  adalah:

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$$

untuk  $X$  diskrit, dan

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

untuk  $X$  kontinu.

Tinjau kembali contoh pelemparan dua uang logam.  
Ruang sampel dari pelemparan dua uang logam:

$$S = \{AA, AG, GA, GG\}$$

sehingga:

$$P(X = 0) = P(GG) = 1/4$$

$$P(X = 1) = P(AG) + P(GA) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

$$P(X = 2) = P(AA) = 1/4$$

maka, rata-rata banyaknya sisi angka yang muncul pada pelemparan dua buah uang logam adalah:

$$\mu = E(X) = (0)(1/4) + (1)(1/2) + (2)(1/4) = 1$$

Jadi, bila seseorang melantunkan dua uang logam secara berulang-ulang, maka rata-rata dia memperoleh satu sisi angka (A) yang muncul pada setiap lemparan.

- **Contoh 1.** Dalam sebuah permainan dengan dadu, seorang pemain mendapat hadiah Rp20 jika muncul angka 2, Rp40 jika muncul angka 4, membayar Rp30 jika muncul angka 6, sementara pemain itu tidak menang atau kalah jika keluar angka yang lain. Berapa harapan kemenangannya?

Jawaban:

Misalkan  $X$  menyatakan peubah acak yang menyatakan jumlah uang yang dimenangkan. Nilai  $X$  yang mungkin adalah 0, 20, 40, dan -30. Setiap angka dadu mempunyai peluang yang sama,  $1/6$ .

$x_i$	0	+20	0	+40	0	-30
-----						
$f(x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Nilai harapan si pemain itu adalah:

$$\mu = E(X) = (0)(1/6) + (20)(1/6) + (0)(1/6) + (40)(1/6) + (0)(1/6) + (-30)(1/6) = 5$$

Jadi, si pemain diharapkan memenangkan Rp5.



- **Latihan.** Tiga uang logam dilempar secara bersamaan. Pemain mendapat Rp5 bila muncul semua sisi angka (A) atau semua sisi gambar (G), dan membayar Rp3 bila muncul sisi angka satu atau dua. Berapa harapan kemenangannya?

(Jawaban ada pada slide berikut)

## Jawaban:

Ruang sampel dari pelemparan 3 uang logam adalah:

$$S = \{AAA, AAG, AGA, AGG, GGG, GGA, GAG, GAA\}$$

Tiap sampel mempunyai peluang sama, yaitu  $1/8$ .

Misalkan  $X$  menyatakan besarnya kemenangan (dalam Rp).

Kemungkinan nilai  $Y$  adalah Rp5 bila kejadian  $E_1 = \{AAA, GGG\}$  yang muncul dan Rp -3 bila kejadian  $E_2 = \{AAG, AGA, AGG, GGA, GAG, GAA\}$  yang muncul.

$$P(E_1) = 2/8 = 1/4$$

$$P(E_2) = 6/8 = 3/4$$

Nilai harapan si pemain adalah:

$$\mu = E(Y) = (5)(1/4) + (-3)(3/4) = -1$$

Artinya si pemain kalah sebesar Rp 1 setiap lemparan 3 mata uang.

- **Latihan.** Suatu pengiriman 9 buah komputer mengandung 2 buah yang cacat. Sebuah sekolah membeli secara acak 3 dari 9 komputer yang ditawarkan. Berapa rata-rata komputer yang rusak diterima oleh sekolah itu?

- **Contoh 2.** Sebuah panitia beranggotakan 3 orang dipilih secara acak dari 4 orang mahasiswa STI dan 3 orang mahasiswa IF. Berapa nilai harapan banyaknya mahasiswa STI yang terpilih dalam panitia tersebut?

Jawaban: Misalkan  $X$  menyatakan jumlah mahasiswa yang terpilih dalam panitia tersebut. Nilai  $X$  yang mungkin adalah 0, 1, 2, dan 3. Distribusi peluang  $X$  adalah

$$f(x) = \frac{C(4,x)C(3, 3-x)}{C(7, 3)}$$

Dapat dihitung  $f(0) = 1/35$ ,  $f(1) = 12/35$ ,  $f(2) = 18/35$ , dan  $f(3) = 4/35$ .

Nilai harapan banyaknya mahasiswa STI di dalam panitia itu adalah:

$$E(X) = (0)(1/35) + (1)(12/35) + (2)(18/35) + (3)(4/35) = 1.7$$

Jadi, secara rata-rata terpilih 1.7 orang mahasiswa STI dalam panitia yang beranggotakan 3 orang tersebut.

- **Contoh 3.** Misalkan  $X$  adalah peubah acak yang menyatakan umur sejenis lampu (dalam jam). Fungsi padatnya diberikan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{x^3}, & x > 100 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitung harapan umur jenis bola lampu tersebut!

Jawaban:

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_{100}^{\infty} x \frac{20000}{x^3} dx \\ &= \int_{100}^{\infty} \frac{20000}{x^2} = 200 \end{aligned}$$

Jadi, jenis bola lampu itu dapat diharapkan berumur secara rata-rata 200 jam.

- Misalkan  $X$  adalah peubah acak diskrit dengan distribusi peluang  $f(x)$ . Pandang sebuah peubah acak baru  $g(X)$  yang bergantung pada  $X$ . Nilai harapan peubah acak  $g(X)$  adalah:

$$\mu_{g(x)} = E[g(X)] = \sum g(x)f(x)$$

bila  $X$  diskrit, dan

$$\mu_{g(x)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

bial  $X$  kontinu.

- **Contoh 4.** Banyaknya mobil yang masuk ke tempat cuci mobil antara jam 13.00 – 14.00 setiap hari mempunyai distribusi peluang:

x	4	5	6	7	8	9
f(x)	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

Misalkan  $g(X) = 2X - 1$  menyatakan upah (dalam Rp) para karyawan yang dibayar perusahaan pada jam tersebut. Hitunglah harapan pendapatan karyawan pada jam tersebut.

Jawaban:

$$E[g(X)] = E(2X - 1) = \sum_{x=4}^9 (2x - 1) f(x)$$

$$= (7)(1/2) + (9)(1/2) + (11)(1/4) + (13)(1/4) + (15)(1/6) + (17)(1/6)$$

$$= \text{Rp } 12.67$$

- **Contoh 5.** Misalkan  $X$  adalah peubah acak dengan fungsi padat

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai harapan  $g(X) = 2X^2 + 1$ .

Jawaban:

$$\begin{aligned} E(2X^2 + 1) &= \int_0^1 (2x^2 + 1)(2 - 2x) dx \\ &= \int_0^1 (4x^2 - 4x^3 + 2 - 2x) dx \\ &= \frac{4}{3} x^3 - \frac{4}{3} x^4 + 2x - x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= 1 \end{aligned}$$



- **Definisi 2.** Bila  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak dengan distribusi peluang gabungan  $f(x, y)$  maka nilai harapan peubah acak  $g(X, Y)$  adalah

$$\mu_{g(X,Y)} = E(g(X, Y)) = \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y)$$

bila  $X$  dan  $Y$  diskrit, dan

$$\mu_{g(X,Y)} = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

bila  $X$  dan  $Y$  kontinu

- **Contoh 6.** Diketahui fungsi padat:

$$f(x, y) = \begin{cases} x(1 + 3y^2) / 4, & 0 < x < 2; 0 < y < 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai harapan dari  $g(X, Y) = Y/X$ .

Jawaban:  $E[g(X, Y)] = E(Y / X)$

$$= \int_0^1 \int_0^2 yx(1 + 3y^2) / (4x) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y(1 + 3y^2) / 4 dx dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y + 3y^2}{2} dy$$

$$= 5/8$$

# Sifat-Sifat Harapan Matematik

**Teorema 1.** Bila  $a$  dan  $b$  konstanta maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Akibat 1: Jika  $a = 0$ , maka  $E(b) = b$

Akibat 2: Jika  $b = 0$ , maka  $E(aX) = aE(X)$

**Teorema 2.**  $E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]$

**Teorema 3.**  $E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)]$

**Teorema 4.** Jika  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak sembarang, maka

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

**Teorema 5.** Jika  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak bebas, maka

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

- **Contoh 5.** Lihat kembali Contoh 4. Hitung  $E(2X - 1)$ .

$x$	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

Jawaban:

$$E(2X - 1) = 2E(X) - 1$$

$$E(X) = \sum_{x=4}^9 xf(x)$$

$$= (4)(1/12) + (5)(1/12) + (6)(1/4) + (7)(1/4) + (8)(1/6) + (9)(1/6)$$
$$= 41/6$$

Sehingga

$$E(2X - 1) = 2E(X) - 1 = 2(41/6) - 1$$

sama seperti hasil sebelumnya.

- **Contoh 6.** Permintaan minuman dalam liter per minggu dinyatakan dalam fungsi variabel random  $g(X) = X^2 + X - 2$ , di mana  $X$  mempunyai fungsi padat:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Tentukan nilai rata-rata dari permintaan minuman tersebut.

Jawaban:

$$E(X^2 + X - 2) = E(X^2) + E(X) - E(2)$$

$$E(2) = 2 \quad (\text{akibat Teorema 1})$$

$$E(X) = \int_1^2 2x(x-1)dx = 5/3$$

$$E(X^2) = \int_1^2 2x^2(x-1)dx = 17/6$$

$$\text{Jadi, } E(X^2 + X - 2) = E(X^2) + E(X) - E(2) = 17/6 + 5/3 - 2 = 5/2$$

- **Contoh 7.** Sepasang dadu dilemparkan. Tentukan nilai harapan jumlah angka yang muncul.

Jawaban:

Misalkan: X menyatakan angka yang muncul pada dadu pertama

Y menyatakan angka yang muncul pada dadu kedua

Ditanya: berapa  $E(X + Y)$ ?

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X) = (1)(1/6) + (2)(1/6) + (3)(1/6) + (4)(1/6) + (5)(1/6) + (6)(1/6) \\ = 7/2$$

$$E(Y) = E(X) = 7/2$$

$$\text{Jadi, } E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 7/2 + 7/2 = 7.$$